## Module et écriture algébrique

**Exercice 1:** Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes suivants

$$z_1 = \frac{3+6\mathbf{i}}{3-4\mathbf{i}} \qquad z_2 = \left(\frac{1+\mathbf{i}}{2-\mathbf{i}}\right)^2 + \frac{3+6\mathbf{i}}{3-4\mathbf{i}} \qquad z_3 = \frac{2+5\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}} + \frac{2-5\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}$$

**Exercice 2:** *Egalité du parallélogramme*
Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ |a|^2 + |b|^2 = \frac{1}{2}(|a-b|^2 + |a+b|^2)$.

**Exercice 3:** Pour $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ , on pose $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$.
Montrer que

1. $Z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow z \in \mathbf{i}\mathbb{R}$
2. $Z \in \mathbf{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}$

## Trigonométrie

**Exercice 4:** Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Linéariser les expressions suivantes : $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$ et $\sin^3(3\theta)$.
2. Exprimer $\cos(4\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$.

**Exercice 5:**
Soient $z_1 = -3 + \mathbf{i}\sqrt{3}$ , $z_2 = \sqrt{2} + \mathbf{i}\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8} - \mathbf{i}\sqrt{8}$. On pose $Z = \dfrac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$.

1. Ecrire $z_1$, $z_2$ et $z_3$ sous forme trigonométrique.
2. En déduire une forme trigonométrique de $Z$.
3. Calculer la forme algébrique de $Z$.

**Exercice 6:** Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner une forme trigonométrique des complexes :

1. $\overline{z}$
2. $-z$
3. $\mathbf{i}z$
4. $z - \overline{z}$

**Exercice 7:** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

1. À quelle condition $t$ est-il bien défini ?
2. Lorsque cette condition est remplie, exprimer $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ en fonction de $t$ uniquement.
   *On doit obtenir des fonctions rationnelles de $t$, c'est-à-dire des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes en $t$.*

## Représentation géométrique

**Exercice 8:** Déterminer, par le calcul puis géométriquement, les nombres complexes $z$ de module 1 tel que $|z+1| = 1$.

**Exercice 9:**
Déterminer l'ensemble des points du plan dont l'affixe $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ vérifie :

1. $\dfrac{z}{1-z} \in \mathbb{R}$.
2. $\dfrac{z}{1-z} \in \mathbb{U}$.
3. $\dfrac{z}{1-z} \in \mathbf{i}\mathbb{R}$.

**Exercice 10:** Déterminez l'ensemble des complexes $z$ tels que le triangle formé par les points d'affixe $z$, $z^2$ et $z^3$ soit isocèle.

**Exercice 11:** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points du plan d'affixe $z_A$, $z_B$ et $z_C$.
Montrer que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si :

$$z_A + \mathbf{j}z_B + \mathbf{j}^2 z_C = 0 \text{ ou } z_A + \mathbf{j}^2 z_B + \mathbf{j}z_C = 0$$

## Equations et racines

**Exercice 12:** Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^3 - (1+\mathbf{i})z^2 + (-6+\mathbf{i})z + 6\mathbf{i} = 0$
2. $z^3 - (1+5\mathbf{i})z^2 + (-6+5\mathbf{i})z + 6 = 0$
3. $z^3 - 2(1+2\mathbf{i})z^2 + (9\mathbf{i}-4)z + 5(1-\mathbf{i}) = 0$

**Exercice 13:** Déterminer les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ tels que :

$$z_1 + z_2 = 5 - 14\mathbf{i} \text{ et } z_1 z_2 = -2(12+5\mathbf{i})$$

**Exercice 14:** Déterminer les racines carrées de $\frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$ en utilisant uniquement

1. des écritures algébriques ;
2. des écritures trigonométriques.

En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

**Exercice 15:** Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^2 - 2\mathbf{i}z + 2 - 4\mathbf{i} = 0$
2. $z^6 + (2\mathbf{i}-1)z^3 - 1 - \mathbf{i} = 0$
3. $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$

**Exercice 16:**

1. Trouvez les racines quatrièmes du complexe $2 + \mathbf{i}\sqrt{12}$.
2. Trouvez les racines $n^{\text{ième}}$ du complexe $1+\mathbf{i}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 17:** Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $\mathbf{e}^z = \mathbf{j}$
2. $\dfrac{\mathbf{i}-z}{\mathbf{i}+z} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

**Exercice 18:** On note $w = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}$, $a = w + w^4$ et $b = w^2 + w^3$.

1. Expliciter $\mathbb{U}_5$ en fonction de $w$.
2. Montrer que $a$ et $b$ sont réels et précisez leur valeur.
3. Montrer que $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0$.
4. Montrer que $a$ et $b$ sont solutions de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.
5. En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

**Exercice 19:** Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
3. $\tan(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. $\cos(x) + \sin(x) = 0$
5. $\cos(x) = -\cos(2x)$
6. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1$
7. $\tan(x) = \tan(2x)$
8. $\cos(x) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$
9. $\sin(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$
10. $\tan(x) \geqslant \sqrt{3}$
11. $\cos(x) + \sin(x) < 0$
12. $\cos(x) \leqslant -\cos(2x)$

## Transformations du plan

**Exercice 20:** Expliciter les transformations d'écriture complexe suivantes :

1. $f_1 : z \mapsto z + 1 + \mathbf{i}$
2. $f_2 : z \mapsto 2z + 1 + \mathbf{i}$
3. $f_3 : z \mapsto \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{4}} z$

**Exercice 21:**
Donner des écritures complexes des transformations du plan suivantes :

1. La translation $t$ de vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(3, -4)$.
2. L'homothétie $h$ de centre $A$ de coordonnées $(1, 1)$ et de rapport 3.
3. La rotation $r$ de centre $A$ de coordonnées $(1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
4. La composée $roh$.